

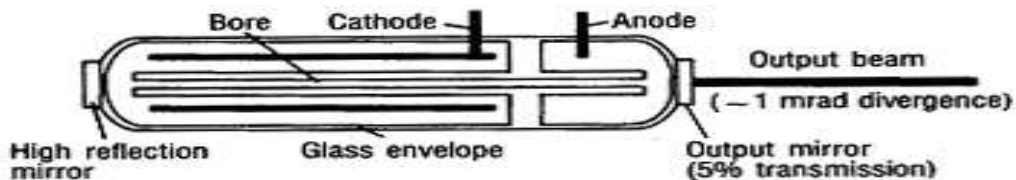
光電實驗(三) 氦氖雷射的縱模

(一) 實驗目的：

雷射為光電研究中不可或缺的工具，例如光學量測及同調光學皆須仰賴到它，而 He-Ne 雷射更是最常用的雷射光源。除非特別設計或經由其它方式過濾，否則一般來說雷射的光輸出並非僅有一種縱模態；這個實驗除了介紹 He-Ne 雷射基本原理及構造之外，最主要是藉由濾波裝置(Fabry-Perot 干涉儀)觀察 He-Ne 雷射中的縱模數，並計算出雷射共振腔的長度。

(二) 實驗原理：

He-Ne 雷射結構之簡介：He-Ne 雷射（或其它氣體雷射）的結構，如圖一所示，主要可分成三大部分：放電管、激發電源供應器和光學共振腔。放電管為一支毛細管，內部充入適當之氦氖混合氣體，它為雷射結構中的光增益介質，提供光放大的主要部份。放電管的兩端各加放電之陰極（鋁圓筒）與陽極（鎢針）。激發電源供應器為一高壓電源供應器，提供一高壓使放電管產生氣體放電，為雷射結構中的能量來源；光學共振腔一般主要由兩片鏡片組成，形成一個共振腔結構，使光線能在兩片鏡片中往返共振不漏失，而達到足夠的光放大效應。整個雷射的結構可由放電毛細管的兩端直接鍍上雷射鏡片形成內鏡式之 He-Ne 雷射，或是再接一 Brewster 窗口加上分離之兩片雷射鏡片，形成外鏡式的 He-Ne 雷射。不同的設計將使得雷射輸出光有不同的特性。



圖一

輸出光功率大小：一般而言，影響輸出光功率的大小因素主要有兩個：放電管之增益與光學腔之設計調整。若先不考慮光學腔之因素，則激發電源供應器所提供的放電電流大小直接影響到放電管之增益，進而使雷射輸出功率改變，當放電電流過高或過低都將使輸出功率變小，只有在某一放電電流時，輸出功率將達到最大之飽和值。(Why?)

雷射縱向模態(longitudinal mode)分析

按電磁學理論，光要在在光學共振腔內產生來回共振放大必須滿足一種共振條件，即為駐波(standing wave)：在共振腔的腔長是半波長的整數倍。

$$L = m \frac{\lambda}{2n}, m \text{ 為整數, 或 } \nu = m \frac{c}{2nL}, \text{ 其中 } \nu: \text{光頻率}$$

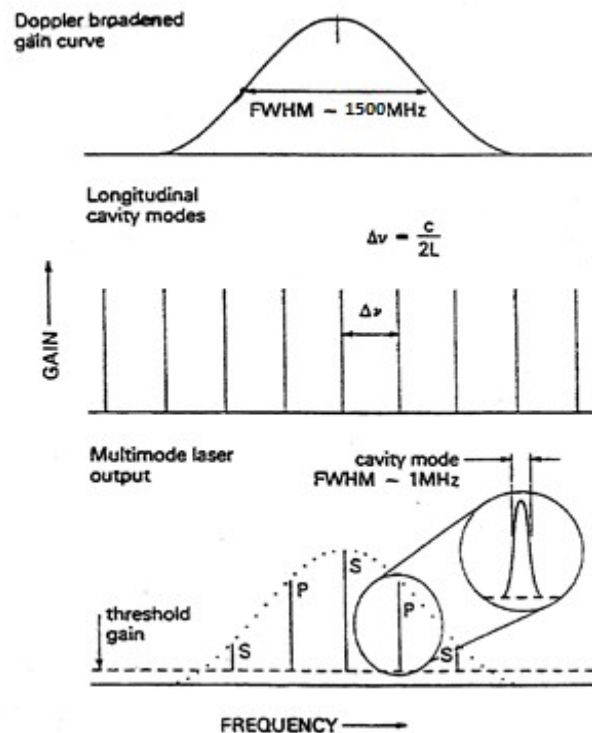
n : 共振腔內的折射率

c : 光速

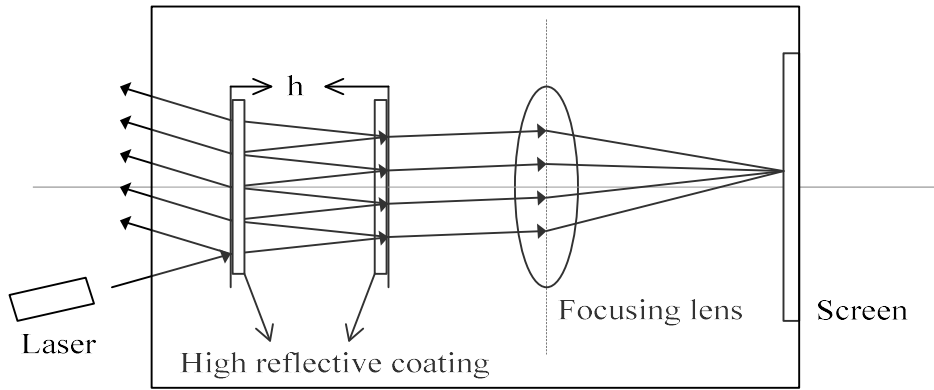
L : 共振腔腔長

因此由上式可知，雷射輸出之縱向模態間距為 $\Delta\nu_{cav} = c/2nL$ ，此稱之雷射縱向模間距(modal spacing)。

雖然駐波條件決定間距，雷射真正的縱向模態輸出還決定於另一個因素：雷射放電管增益介質的放大頻寬(gain amplification bandwidth)。也就是說增益介質的作用範圍有一定頻率範圍限制，其對氣體雷射而言，通常決定於內部氣體分子的能階躍遷頻寬，它主要來自於 Doppler 效應的 Doppler broadening。一般此效應之頻寬較縱向模間距大，因此大部分之氣體雷射的輸出都同時存在數個縱向模態，如圖三所示。舉例來說，若一 He-Ne 雷射之共振腔長為 27.4cm，則算出來的 $\Delta\nu_{cav}$ 約為 548MHz(可試反算其氣體折射率)，而對波長 633nm 之氬氣分子能階，其 Doppler broadening 的頻寬和溫度及氣體分子比例有關，約為 800~1600MHz，一般取為 1500MHz。因此我們可以推論大約有 2~3 個縱向模態能產生共振，且大部分時間，我們可以發現均只有 2 個模態存在。利用 Fabry-Perot 干涉儀，我們可以觀察這些模態之特性。當只有 2 個模態存在時，此二模態互為相互垂直的線性偏極化，但若有三個模存在時，則相鄰之縱向模的偏極特性就不一定了。

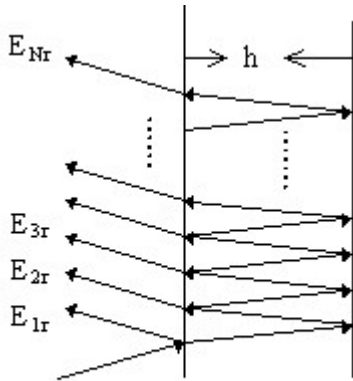


圖二



Fabry-Perot 示意簡圖

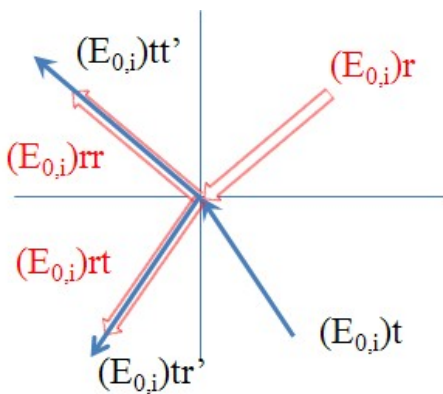
由光路圖可推知



光路圖

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1r} &= E_0 r e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_{2r} &= E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)} \\ \tilde{E}_{3r} &= E_0 t r'^3 t' e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ &\vdots \\ \tilde{E}_{Nr} &= E_0 t r'^{(2N-3)} t' e^{i(\omega t - (N-1)\delta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \dots + \tilde{E}_{Nr} \\ &= E_0 r e^{i\omega t} + E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)} + E_0 t r'^3 t' e^{i(\omega t - 2\delta)} + \dots + E_0 t r'^{(2N-3)} t' e^{i(\omega t - (N-1)\delta)} \\ &= E_0 e^{i\omega t} \left\{ r + r' t t' e^{-i\delta} \left[1 + (r'^2 e^{-i\delta}) + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + \dots + (r'^2 e^{-i\delta})^{N-2} \right] \right\} \\ &= E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{r' t t' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right] \end{aligned}$$



Stokes Relations: (Explain why?)

$$\begin{cases} E_{0,i} t t' + E_{0,i} r r' = E_{0,i} \\ E_{0,i} r t + E_{0,i} t r' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t t' = 1 - r^2 \\ r' = -r \end{cases}$$

Use Stokes Relations

$$\Rightarrow \tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]$$

Reflected flux density $I_r = \frac{\tilde{E}_r \tilde{E}_r^*}{2}$

$$\Rightarrow I_r = \frac{E_0^2 r^2 (1 - e^{-i\delta})(1 - e^{i\delta})}{2(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{i\delta})} = I_{in} \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta}$$

$$R \equiv \frac{I_r}{I_{in}} = \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta}$$

$$\because \cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

$$R = \frac{4r^2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{(1 + r^4) - 2r^2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right)} = \frac{4r^2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

$$= \frac{\frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)} = \frac{\left(\frac{2r}{(1 - r^2)} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{1 + \left(\frac{2r}{(1 - r^2)} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

Let $F \equiv \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2$ coefficient of finesse

$$\Rightarrow R = \frac{F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

$\because T + R = 1$

$$\Rightarrow T = 1 - R = 1 - \frac{F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

當光程差(Optical path difference) $V = 2h \cos \theta = m\lambda$ 時，產生亮紋
所以此時相位差 δ 為 kV

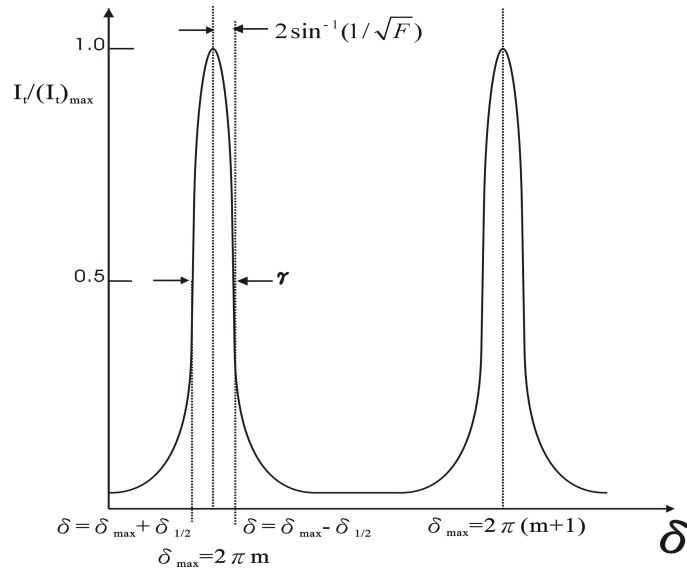
$$\delta = kV = \frac{2\pi}{\lambda_0} (2h \cos \theta) = \frac{4\pi}{\lambda_0} h \cos \theta = \frac{4\pi}{C} v_0 h \cos \theta \quad (1)$$

如圖，若穿透率 $T = \frac{1}{2}$ 時

$$\Rightarrow F \sin^2\left(\frac{\delta_{\max} \pm \delta_{1/2}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \delta_{1/2} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right)$$

則半高寬 Full Width of Half Maximum(FWHM) γ

$$\gamma = 2\delta_{1/2} = 4 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \quad (2)$$

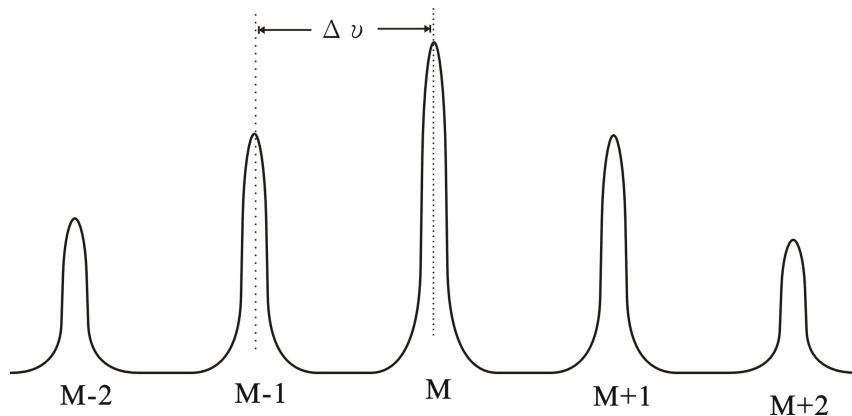


Free spectral range $\theta = 0^\circ$ (normal incidence)

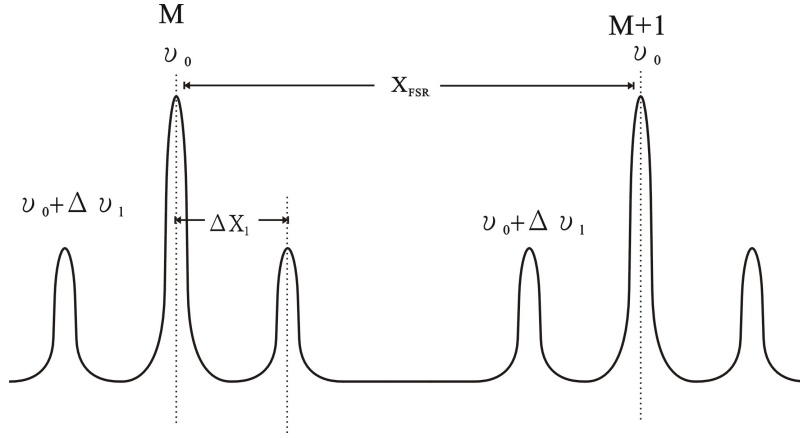
由 eq(1)、亮紋($T = 1$)知 $\delta = \frac{4\pi}{C} \nu_m h$ 、 $F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \delta = 2m\pi$

$$\therefore \delta = \frac{4\pi}{C} \nu_m h = 2m\pi$$

$$\Rightarrow \nu_m = \frac{C}{2h} m \Rightarrow \Delta \nu_{FSR} = \frac{C}{2h} \quad (3)$$



圖(三)相鄰 peak 的 $\Delta \nu$ 關係示意圖



圖(四)雷射經掃描式 Fabry Perot 干涉儀後所測得關係示意圖

The finesse of the Fabry-Perot is defined as

$$F_{FP} \equiv \frac{\text{Separation of peaks}}{\text{FWHM}} = \frac{\Delta \nu_{FSR}}{\Delta \nu_{FWHM}} = \frac{\Delta X_i}{\gamma} \quad (4) \quad (\text{注意: } F_{FP} \text{ 與上一頁的 } F \text{ 不同})$$

先考慮主 Peak 經 FP 後的關係

$$\delta_m = \frac{4\pi}{C} \nu_0 h = 2m\pi$$

$$\delta_{m+1} = \frac{4\pi}{C} \nu_0 (h + X_{FSR}) = 2(m+1)\pi$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{C} \nu_0 X_{FSR} = 2\pi \Rightarrow X_{FSR} = \frac{C}{2\nu_0} \quad (5)$$

再考慮其兩旁的 Peak 經 FP 後的關係

$$\frac{4\pi}{C} (\nu_0 - \Delta \nu_L)(h + \Delta X_L) = 2m\pi, \quad \frac{4\pi}{C} \nu_0 h = 2m\pi$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{C} (\nu_0 \Delta X_L - \Delta \nu_L h - \Delta \nu_L \Delta X_L) = 0$$

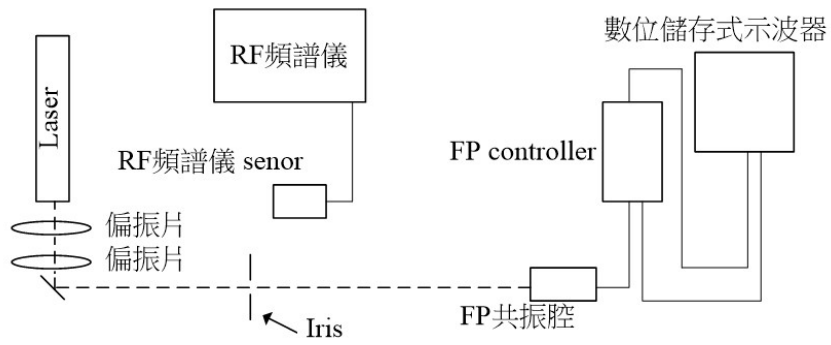
$$\because \Delta \nu_L \Delta X_L \approx 0$$

$$\Rightarrow \nu_0 \Delta X_L = \Delta \nu_L h \Rightarrow \Delta X_L = \frac{\Delta \nu_L}{\nu_0} h \quad (5')$$

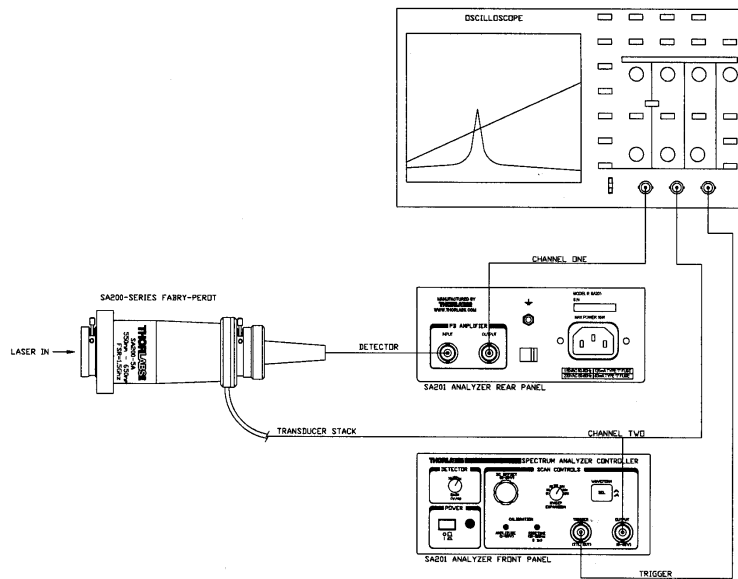
$$\frac{(5')}{(5)} \Rightarrow \frac{\Delta X_L}{X_{FSR}} = \frac{2\Delta \nu_L}{C} h = \frac{h}{L} \quad (6) \quad (\text{由圖二知 } \Delta \nu_L = \frac{C}{2L})$$

(三) 實驗儀器與光電元件：

He-Ne 雷射(JDSU-1126P)、Fabry-Perot 干涉儀組(Thorlabs)、Ramp Generator (Thorlabs)、數位儲存式示波器(GW GDS-840C)、偏振片、光偵測器(EOT ET-2030A)、RF 頻譜儀(GW GSP-827)

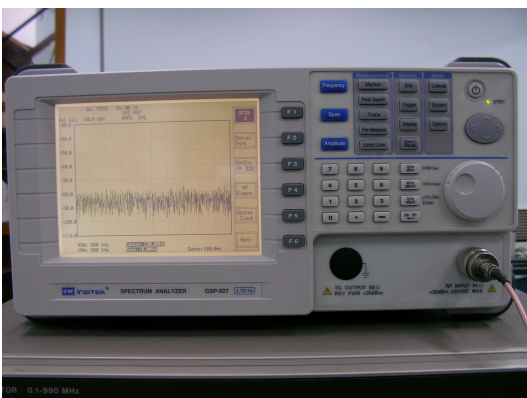


圖(五)實驗儀器裝置圖

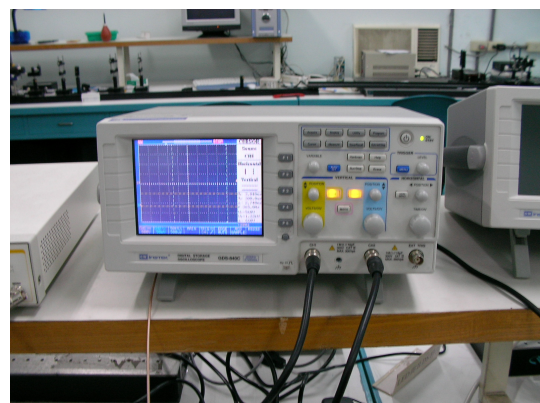


圖(六) Fabry-Perot 干涉儀組裝置圖

基本上儀器的架設都已經架好，要注意的是當要開始實驗之前先利用 Iris，檢查光路是否保持水平，並垂直的打入 FP 共振腔內。檢查 ok 後，Iris 可留可不留，自行決定。



RF 頻譜儀：GW GSP-827



數位儲存式示波器：GW GDS-840C

注意：

- 1.FP controller 的參數都已調整完成，實驗中不必做任何變動。
- 2.部份連接儀器的訊號線，請勿過度彎曲造成折損。

(四) 實驗步驟：

一、Fabry-Perot 干涉儀

利用 Fabry-Perot 干涉儀找出 He-Ne 雷射的頻率分佈；不同的雷射縱模可調整 Fabry-Perot 兩平面鏡之間的長度使之共振，再經由光偵測器接收輸出光並將訊號傳至示波器。如圖(五)、(六)將實驗裝置架設完成。

1. 架設雷射光路。
2. 打開所有儀器電源暖機 10~15 分鐘。
3. 調整兩偏振片的偏振夾角，勿使雷射光過強。
4. 調整 Fabry-Perot 前端的光圈大小，使雷射光垂直入射光圈。
5. 若雷射光與共振腔平面垂直，則在示波器上可找到多個波峰。此時調整 Ch.2 的 V 及 Hz 單位大小，以便得到如圖(四)的影像。
6. 調整干涉儀的水平、手動平行、Ramp Generator 上的三個平行微調鈕，使示波器上的兩波峰值最大且相互分離。
7. 按下 Run/Stop 鈕，將圖形暫存以便測量(若暫停時有影像未入鏡，可調整 Horizontal Position 旋鈕將影像作左右橫移)。
8. 按下 Cursor 鈕，使用測量工具。(F2 Horizontal：有三種模式左邊線、右邊線及左、右邊線同時移動，左右邊線的值及其差分別顯示在視窗右下的 T_1 、 T_2 及 Δ 。F3 Vertical：同樣有三種模式，上邊線、下邊線及上下邊線同時移動，而其值分別為 V_1 、 V_2 及 Δ 。選好要移動那一線後，用 Variable 旋鈕作調整)量測出 X_{FSR} 、 ΔX_1 及 γ 。

二、頻譜儀(長按電源 5 秒，開啟電源。)

- (1)將頻譜儀與其 sensor 以光纖連接，並將之置入光路中。
- (2)將第二個偏振片取下。按下 span 鈕，接著按下 F2 Full Span。
- (3)微調 Sensor 的位置及方向，若雷射光準確打在 sensor 上，應可看見如圖(三)之連續波形。
- (4)按下 Peak Search，利用 F3 Next Peak 記錄下主 Peak 及其之後二個 Peak 的頻率。(顯示在視窗右上角)

數據處理

本實驗之 Fabry-Perot 為 con-focal 而非兩平行面鏡故式(3)修正為 $\Delta\nu_{FSR} = \frac{C}{4h}$ (7)，式(6)修正為

$$\frac{(5')}{(5)} \Rightarrow \frac{\Delta X_L}{X_{FSR}} = \frac{2h}{L} \dots(8)$$

(1) 利用量測出的 X_{FSR} 、 $\Delta X_{\ell 1}$ 及已知 $h=5\text{cm}$ ，代入 eq. (8) 可求得雷射共振腔長 L 。

(2) 利用頻譜儀測出的 $\Delta\nu$ 代入 $\Delta\nu_L = \frac{C}{2L}$ 也可求得雷射共振腔長 L

(3) 利用 γ 求出 F (coefficient of finesse) 及 R 、 F_{FP}

(五) 問題與討論：

1. Fabry-Perot 干涉儀所量到的是絕對波長還是相對波長？
2. 比較光譜量測用的光柵(grating)與 Fabry-Perot Etalon (Cavity)的差異。

注意事項：

1. 須先熱機 10~15 分鐘，以待雷射共振腔熱平衡。
2. 此實驗為高靈敏度實驗，請儘量避免外界干擾，尤其是雷射。
3. 當共振腔長度為 1/2 波長的整數倍時，共振腔穿透率明顯提高，此時示波器上對應出一個波峰。
4. 實驗中，須調整兩偏振片的偏振夾角使雷射光不致過強，並調整入射光垂直入射，此時示波器上的訊號趨於穩定。
5. 實驗中最重要的幾個參數：FSR(Free Spectral Range, $c/2L$)、Resolution($\Delta f_{1/2}$) 以及精確度(Finesse)。FSR 需要大於 $\Delta\nu$ ，否則無法判定 $\Delta\nu$ 。